ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

2.1 Εισαγωγή στην διανυσματική ανάλυση

Γνωρίζουμε ότι πολλές φυσικές ποσότητες ορίζονται ακριβώς ένα απλό αριθμό, όπως η θερμοκρασία, η μάζα ενός αντικειμένου, α απόσταση δύο πόλεων, κλπ. Αυτά τα μεγέθη ονομάζονται *βαθμωτά* ή *αριθμητικά* (scalars). Άλλα όμως μεγέθη για να ορισθούν πλήρως χρειάζονται τον καθορισμό της διεύθυνσής τους μαζί με τον αριθμό. Τέτοια μεγέθη είναι η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου από την πόλη Α στην πόλη Β, η δύναμη που ασκείται σε ένα ελατήριο για να επιμηκυνθεί, κλπ. Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται *διανυσματικά* ή *διανύσματα* (vectors). Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις βασικές έννοιες της διανυσματικής ανάλυσης.

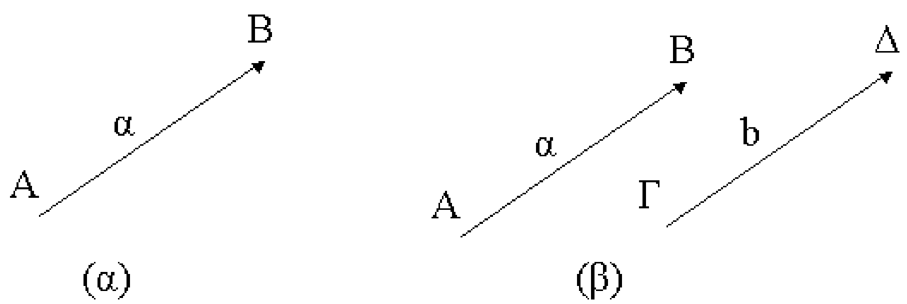
2.1.1 Βασικές έννοιες

Το διάνυσμα $\vec{AB}$ ορίζεται ως ένα ευθύγραμμο τμήμα με διεύθυνση από το σημείο Α, που ονομάζεται αρχή, στο σημείο Β, που ονομάζεται πέρας του. Τα διανύσματα συμβολίζονται και με μικρά γράμματα, $\vec{a}$, ή και με μικρά γράμματα αλλά διπλοτυπωμένα (boldface), **α**. Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε κυρίως τον τελευταίο συμβολισμό. Το διάνυσμα $\vec{BA}$ είναι διαφορετικό από το $\vec{AB}$, δηλ. $\vec{AB} \neq \vec{BA}$. Το διάνυσμα $\vec{BA}$ κατευθύνεται από το Β στο Α, δηλ. έχει αρχή το Β και πέρας το Α.

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται *μέτρο* του διανύσματος $\vec{AB}$ και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$, $|\alpha|$, ή απλά α. Να σημειώσουμε ότι ενώ το **α** είναι διάνυσμα, το α είναι βαθμωτό μέγεθος.

Δύο διανύσματα **α** και **b** λέγονται *ίσα* όταν έχουν ίδια διεύθυνση και φορά, δηλ. είναι ομόρροπα, και ίδιο μέτρο.

Δύο διανύσματα με την ίδια διεύθυνση και ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά λέγονται αντίθετα, και συμβολίζουμε **α**=-**b**. Έτσι εάν **α**= $\vec{AB}$, τότε το –**α** είναι το ίδιο με το διάνυσμα $\vec{BA}$.



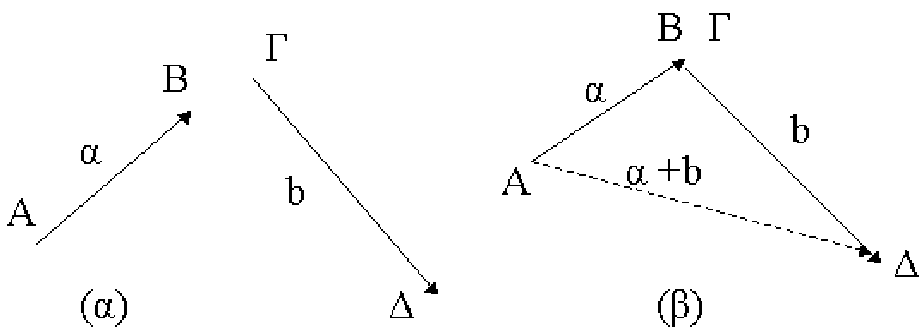
Σχήμα 2.1 α) Ένα διάνυσμα $\vec{AB}$, β) δύο ίσα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$.

2.2 Πράξεις διανυσμάτων

2.2.1 Πρόσθεση διανυσμάτων

Μία πολύ χρήσιμη πράξη μεταξύ δύο ή περισσοτέρων διανυσμάτων είναι η πρόσθεση. Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ του Σχ. 2.2. Αυτό επιτυγχάνεται με τον *κανόνα του τριγώνου* (triangle law).

Μεταφέρουμε το διάνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$ παράλληλα έτσι ώστε η αρχή του $\vec{\Gamma\Delta}$, δηλ. το Γ να συμπέσει με το πέρας του $\vec{AB}$, δηλ. το Β. Αυτή η μετατόπιση του διανύσματος $\vec{\Gamma\Delta}$ δεν το μεταβάλλει και είναι επιτρεπτή. Έτσι το διάνυσμα που προκύπτει ενώνοντας την αρχή του διανύσματος $\vec{AB}$ με το πέρας του μετατοπισμένου διανύσματος $\vec{\Gamma\Delta}$, δηλ. το $\vec{A\Delta}$, είναι το *άθροισμα* ή *συνισταμένη* των δύο διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$. Έχουμε, δηλαδή, ότι $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=\vec{A\Delta}$.



Σχήμα 2.2 α) Τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$, β) το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$.

Διαφορά ενός διανύσματος **b** από το διάνυσμα **a** ονομάζουμε το διάνυσμα **a**+(-**b)**, το οποίο συμβολίζεται με **a**-**b**.

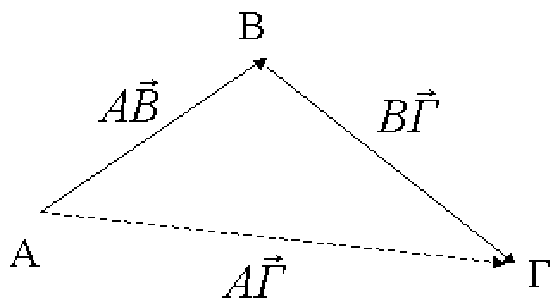
Εάν ένα διάνυσμα **b** έχει το ίδιο μήκος με ένα διάνυσμα **a**, αλλά αντίθετη φορά, τότε το πέρας του **b** συμπίπτει με την αρχή του **a**. Λέμε τότε ότι το άθροισμά τους είναι ένα διάνυσμα με μέτρο μηδέν και αυθαίρετη διεύθυνση, το οποίο συμβολίζουμε με **0**.

2.2.1.1 *Παράδειγμα 1*. Κατεύθυνση ενός αυτόματου οχήματος (Croft *et al*, 1996)

Ένα όχημα μετακινείται πάνω σε σιδηροτροχιές σε μία βιομηχανία μεταφέροντας ηλεκτρικά εξαρτήματα από την αποθήκη Α στην γραμμή παραγωγής Γ (Σχ. 2.3). Το όχημα μπορεί να φθάσει στο σημείο Γ είτε απ' ευθείας, είτε μέσω του σημείου Β. Η κίνηση από το Α στο Β μπορεί να παρασταθεί με ένα διάνυσμα $\vec{AB}$, γνωστό ως *διάνυσμα μετατόπισης* (displacement vector), του οποίου το μέτρο είναι η απόσταση των σημείων Α και Β. Παρομοίως, η κίνηση από το Β στο Γ παριστάνεται με $\vec{B\Gamma}$ και η απ' ευθείας κίνηση από το Α στο Γ παριστάνεται με $\vec{A\Gamma}$. Είναι φανερό ότι εφ' όσον τα σημεία Α, Β, και Γ είναι σταθερά και τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{A\Gamma}$ είναι σταθερά. Ενώνοντας την αρχή του διανύσματος $\vec{AB}$ με το πέρας του διανύσματος $\vec{B\Gamma}$, εφαρμόζουμε τον κανόνα του τριγώνου για την πρόσθεση διανυσμάτων για να βρούμε την συνδυαστική επίδραση των δύο μετατοπίσεων,

$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}. \tag{2.1}$$

Λέμε τότε ότι το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$ είναι η *συνισταμένη* των διανυσμάτων $\vec{AB}$, και $\vec{B\Gamma}$.



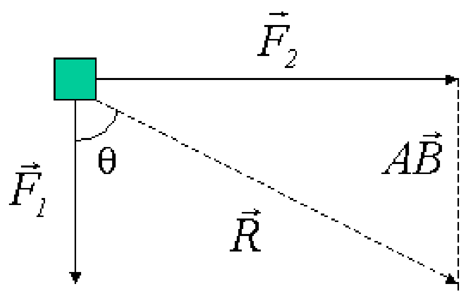
Σχήμα 2.3 Η συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$.

2.2.1.2 *Παράδειγμα 2*. Συνισταμένη δύο δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα.

Μία δύναμη $\mathbf{F_1}$ 4N ασκείται κατακόρυφα, και μία δύναμη $\mathbf{F_2}$ 3N ασκείται οριζόντια προς τα δεξιά σε ένα σώμα, όπως στο Σχ. 2.4. Εάν μετατοπίσουμε την $\mathbf{F_1}$ μέχρι η αρχή της να συμπέσει με το πέρας της $\mathbf{F_2}$, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του τριγώνου (ή παραλληλογράμμου), για να βρούμε την συνδυασμένη επίδραση των δύο δυνάμεων στο σώμα. Αυτή η δύναμη, έστω $\mathbf{R}$, είναι,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F_2} + \mathbf{F_1}, \tag{2.2}$$

και λέγεται *διανυσματικό άθροισμα* των διανυσμάτων $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$. Η συνισταμένη δύναμη $\mathbf{R}$ εφαρμόζεται κατά μία γωνία θ ως προς την κατακόρυφο, όπου $\tan\theta = 3/2$, και έχει μέτρο που βρίσκεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα $\sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$ N.



Σχήμα 2.4 Η συνισταμένη των δυνάμεων $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$.

2.2.2 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού κ με ένα διάνυσμα $\mathbf{a} \neq 0$, είναι ένα διάνυσμα κ$\mathbf{a}$ με μέτρο $|\kappa| \cdot |\mathbf{a}|$. Το διάνυσμα κ$\mathbf{a}$ είναι ομόρροπο του $\mathbf{a}$, εάν κ>0, ενώ είναι αντίρροπο (έχει αντίθετη φορά) του $\mathbf{a}$, εάν κ<0.

Μοναδιαίο είναι το διάνυσμα που έχει μήκος ίσο με την μονάδα. Πολλές φορές συμβολίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα με ένα καπέλλο πάνω από το γράμμα, δηλ. $\hat{\mathbf{a}}$.

2.2.3 Ιδιότητες

Έστω τρία διανύσματα **a**, **b**, και **c**, και οι αριθμοί κ, και λ. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες,

α) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, (αντιμεταθετική ιδιότητα)

β) $\mathbf{a} + (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})+\mathbf{c}$, (προσεταιριστική ιδιότητα)

γ) $\kappa(\lambda\mathbf{a}) = (\kappa\lambda)\mathbf{a} = \lambda(\kappa\mathbf{a})$, (προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό)

δ) $\kappa(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \kappa\mathbf{a} + \kappa\mathbf{b}$, (επιμεριστική ιδιότητα)

ε) $(\kappa+\lambda)\mathbf{a} = \kappa\mathbf{a} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}$, (επιμεριστική ιδιότητα)

στ) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, (μηδενικό διάνυσμα)

ζ) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, (αντίθετο διάνυσμα)

Εκτός των παραπάνω ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες,

η) $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$,

θ) $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

ι) $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{a}$,

ια) $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{b})$,

ιβ) $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = \mathbf{0}$, ή $\mathbf{a}=\mathbf{0}$,

ιγ) $(-\lambda)\mathbf{a} = \lambda(-\mathbf{a}) = -(\lambda\mathbf{a})$,

ιδ) $\lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$,

ιε) $(\kappa-\lambda)\mathbf{a} = \kappa\mathbf{a} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}$

ιστ) Αν $\kappa\mathbf{a} = \kappa\mathbf{b}$ και $\kappa\neq 0$, τότε $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (νόμος της διαγραφής)

ιζ) Αν $\kappa\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$ και $\mathbf{a}\neq 0$, τότε $\kappa = \lambda$ (νόμος της διαγραφής).

2.2.3.1 *Παράδειγμα 1*. Μαγνητικά διανύσματα (magnetic vectors)

Η *ένταση του μαγνητικού πεδίου* (magnetic field intensity), **H**, είναι μία διανυσματική ποσότητα με μονάδες Αμπέρ ανά μέτρο (Ampere per meter, Am^{-1}). Η *πυκνότητα της μαγνητικής ροής* (magnetic flux density), **B**, είναι επίσης μία διανυσματική ποσότητα με μονάδες Βέμπερ ανά τετραγωνικό μέτρο (Weber per square meter, Wb m^{-2}) ή Τέσλα (Tesla, T).

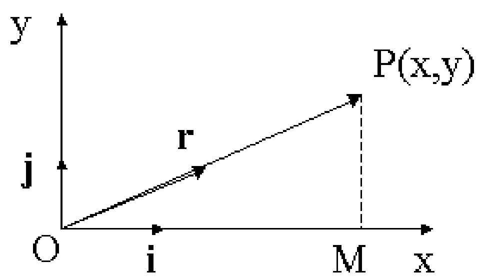
Το διάνυσμα **B** μπορεί να υπολογισθεί πολλαπλασιάζοντας το μαγνητικό πεδίο **H** με μία βαθμωτή ποσότητα μ, δηλαδή,

$$\mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H}, \tag{2.3}$$

όπου η ποσότητα μ είναι γνωστή ως μαγνητική διαπερατότητα του υλικού και έχει μονάδες Βέμπερ ανά Αμπέρ ανά μέτρο (Weber per ampere per meter, Wb A^{-1} m^{-1}).

2.2.4 Καρτεσιανές συντεταγμένες – διανύσματα στο επίπεδο

Δίνεται το x-y επίπεδο του Σχ. 2.5, και το σημείο P(x,y). Το διάνυσμα που ορίζεται ενώνοντας το O με το P, δηλ. το $\vec{OP}$, ονομάζεται *διάνυσμα θέσης* (position vector) του P, που συνήθως συμβολίζεται με **r**.



Σχήμα 2.5 Το x-y επίπεδο και το σημείο P(x,y).

Το μέτρο του διανύσματος **r** είναι, $|\mathbf{r}| = r$, το μήκος του διανύσματος $\vec{OP}$. Είναι δυνατό να εκφράσουμε το διάνυσμα **r** σε σχέση με τους αριθμούς x, y.

Εάν δηλώσουμε με $\hat{\mathbf{i}}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα των x, και $\hat{\mathbf{j}}$ (μπορούμε να παραλείπουμε το «καπέλλο») ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα των y, τότε είναι φανερό ότι,

$$\vec{OM} = \mathrm{x}\mathbf{i} \text{ και } \vec{MP} = \mathrm{y}\mathbf{j}. \tag{2.4}$$

Στη συνέχεια, από τον νόμο του τριγώνου προκύπτει ότι,

$$\mathbf{r} = \vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = \mathrm{x}\mathbf{i} + \mathrm{y}\mathbf{j}. \tag{2.5}$$

Είναι επί πλέον φανερό ότι τα μοναδιαία διανύσματα **i** και **j** είναι ορθογώνια. Οι αριθμοί x και y είναι οι **i** και **j** συνιστώσες του **r**. Επί πλέον, το μέτρο *r* του διανύσματος $\vec{OP}$ δίνεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$r = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}. \tag{2.6}$$

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε και τους εναλλακτικούς συμβολισμούς,

$$\mathbf{r} = \vec{OP} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}, \text{ και} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{r} = \vec{OP} = (\mathrm{x} \quad \mathrm{y}). \tag{2.8}$$

2.2.4.1 *Παράδειγμα 1*

Εάν A είναι ένα σημείο με συντεταγμένες (4,3), και B ένα άλλο σημείο με συντεταγμένες (-2,2), να βρεθούν τα διανύσματα θέσης των A και B, και το διάνυσμα $\vec{AB}$. Επί πλέον, να βρεθεί και το μέτρο $|\vec{AB}|$.

<u>Λύση</u>

Το διάνυσμα θέσης του A είναι $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, το οποίο θα συμβολίζουμε με **a**, ενώ το διάνυσμα θέσης του B είναι $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ και το οποίο θα συμβολίζουμε με **b**. Εάν εφαρμόσουμε τον κανόνα του τριγώνου στο τρίγωνο OAB, Σχ. 2.6, έχουμε,

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}, \tag{2.9}$$

δηλαδή,

$$\mathbf{a} + \vec{AB} = \mathbf{b}. \tag{2.10}$$

Οπότε έχουμε,

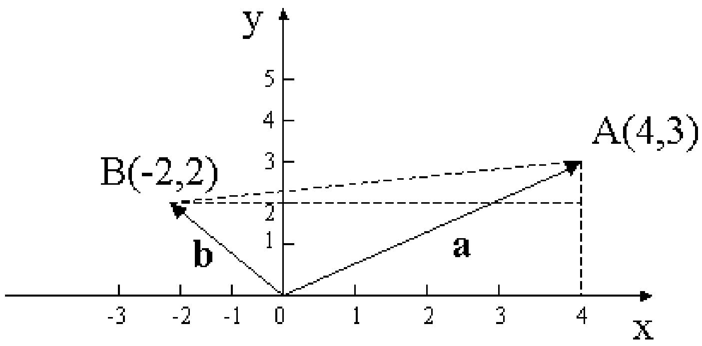
$$\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} =$$

$$= (-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) =$$

$$= -6\mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

Παρατηρούμε ότι η αφαίρεση γίνεται μεταξύ των συντελεστών των μοναδιαίων διανυσμάτων. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{AB}$ βρίσκεται από την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 6 και 1. Δηλαδή,

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}.$$



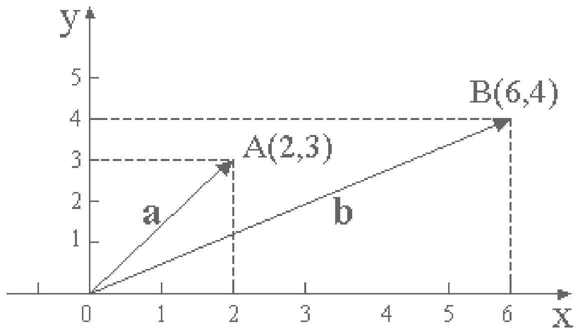
Σχήμα 2.6 Τα σημεία A και B στο x-y επίπεδο.

2.2.4.2 *Παράδειγμα 2*

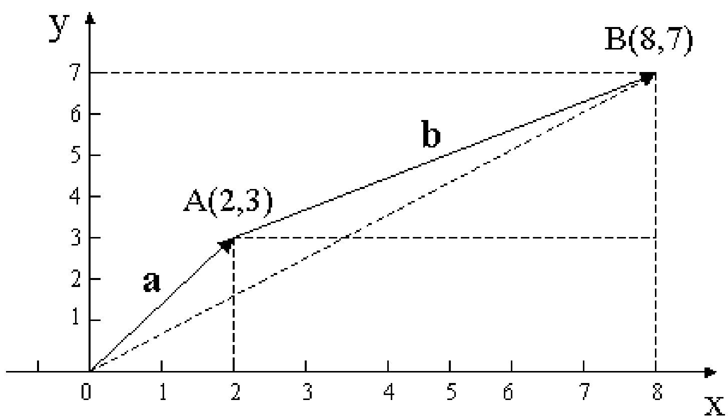
Έστω τα διανύσματα $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, και $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Να υπολογισθεί το άθροισμα **a** + **b**.

<u>Λύση</u>

Μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε ένα διάγραμμα (Σχήμα 2.7) και τον κανόνα του τριγώνου, είτε να προσθέσουμε αλγεβρικά τις συνιστώσες των διανυσμάτων στους άξονες x και y.



Σχήμα 2.7 Τα διανύσματα **a** και **b** στο x-y επίπεδο.



Σχήμα 2.8 Τα διανύσματα **a** και **b** στο x-y επίπεδο.

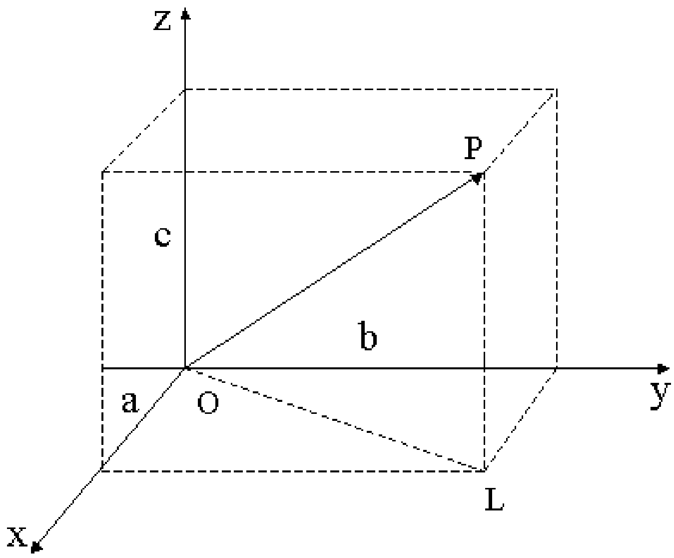
Μεταφέροντας το διάνυσμα **b**, έτσι ώστε η αρχή του να συμπέσει με το πέρας του διανύσματος **a**, βλέπουμε ότι το καινούριο διάνυσμα που προκύπτει από τον κανόνα του τριγώνου έχει συντεταγμένες (8,7).

Το ίδιο προκύπτει προσθέτοντας τις συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων **a** και **b**,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} =$$
$$= (2\mathbf{i}+3\mathbf{j}) + (6\mathbf{i}+4\mathbf{j}) =$$
$$= 8\mathbf{i}+7\mathbf{j}.$$

2.2.5 Καρτεσιανές συντεταγμένες – διανύσματα στο χώρο

Μπορούμε να επεκτείνουμε το σύστημα συντεταγμένων της παραγράφου 2.2.4 στον τρισδιάστατο χώρο, χρησιμοποιώντας ένα τρίτο άξονα, τον z-άξονα (z-axis), όπως στο Σχ. 2.9.



Σχήμα 2.9 Το τρισδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{OP}$.

Το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του Σχήματος 2.9 ονομάζεται «δεξιόστροφο», διότι ακολουθεί τον «κανόνα του δεξιού χεριού». Πιό συγκεκριμένα, οι άξονες Ox, Oy και Oz σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο σύνολο, διότι εάν περιστρέψουμε τον άξονα Ox προς τον Oy με ένα δεξιόστροφο κατσαβίδι τότε προκύπτει μία ενέργεια κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Oz.

Το διάνυσμα $\vec{OP}$ ορίζεται από τις συνιστώσες του a κατά μήκος του άξονα Ox, b κατά μήκος του άξονα Oy και c κατά μήκος του άξονα Oz. Οι συνιστώσες a, b, και c ονομάζονται ορθογώνιες συντεταγμένες ή απλά συντεταγμένες του σημείου P. Εάν **i**, **j**, και **k** είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων Ox, Oy και Oz, τότε το διάνυσμα $\vec{OP}$ γράφεται,

$$\vec{OP} = \mathrm{a}\mathbf{i} + \mathrm{b}\mathbf{j} + \mathrm{c}\mathbf{k}\,. \tag{2.11}$$

Επίσης έχουμε ότι,

$$\mathrm{OL}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2,\ \mathrm{OP}^2 = \mathrm{OL}^2 + \mathrm{c}^2,$$

$$\text{και } \mathrm{OP}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2\,.$$

Συνεπώς, εάν $\mathbf{r} = \mathrm{a}\mathbf{i} + \mathrm{b}\mathbf{j} + \mathrm{c}\mathbf{k}$, τότε

$$\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2}\,. \tag{2.12}$$

Το παραπάνω μας δίνει ένα τρόπο υπολογισμού του μέτρου τρισδιάστατου διανύσματος.

2.2.5.1 *Παράδειγμα 1*

Να υπολογισθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{OP} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

<u>Λύση</u>

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.12) έχουμε,

$$\mathrm{OP} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 7.0711\,.$$

2.2.6 Συνημίτονα κατεύθυνσης (direction cosines)

Η διεύθυνση ενός διανύσματος στο χώρο καθορίζεται από τις γωνίες που σχηματίζει το διάνυσμα με τους άξονες Ox, Oy και Oz (Σχ. 2.10). Έστω, $\vec{OP} = \mathbf{r} = \mathrm{a}\mathbf{i} + \mathrm{b}\mathbf{j} + \mathrm{c}\mathbf{k}$. Τότε έχουμε,

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{r}} = \cos\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{a} = \mathrm{r}\cos\mathrm{a}\,, \tag{2.13α}$$

$$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{r}} = \cos\beta \Rightarrow \mathrm{b} = \mathrm{r}\cos\beta\,, \tag{2.13β}$$

$$\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{r}} = \cos\gamma \Rightarrow \mathrm{c} = \mathrm{r}\cos\gamma\,. \tag{2.13γ}$$

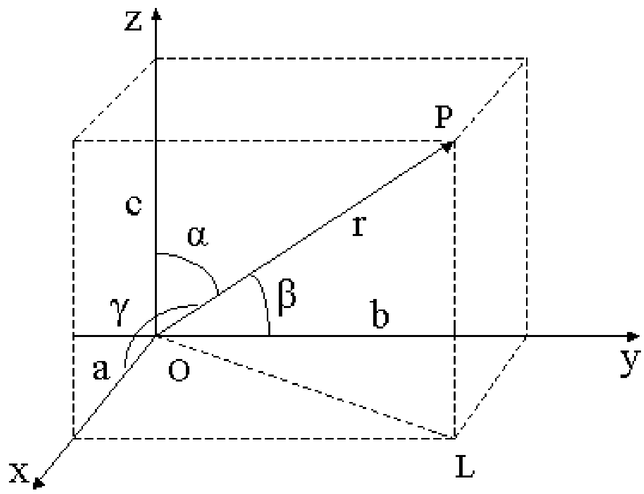
Έχουμε επίσης ότι,

$$a^2+b^2+c^2=r^2, \tag{2.14α}$$

$$r^2\cos^2 α+r^2\cos^2 β+c^2\cos^2 γ=r^2, \tag{2.14β}$$

$$\cos^2 α+\cos^2 β+\cos^2 γ=1. \tag{2.14γ}$$

Εάν l = cosα, m = cosβ, και n = cosγ, τότε $l^2+m^2+n^2=1$.



Σχήμα 2.10 Οι γωνίες του διανύσματος $\vec{OP}$ με τους άξονες.

Οι αριθμοί l, m, και n ονομάζονται *συνημίτονα κατεύθυνσης* του διανύσματος $\vec{OP}$ και είναι οι τιμές των συνημιτόνων των γωνιών που σχηματίζει το διάνυσμα με τους τρείς άξονες.

2.2.6.1 *Παράδειγμα 1*

Να βρεθούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος $\vec{OP}=2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.

<u>Λύση</u>

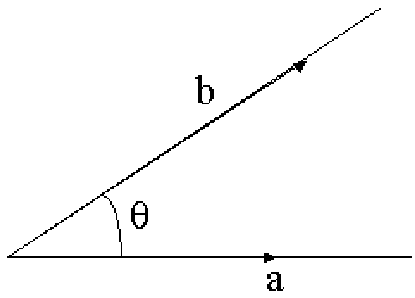
Έχουμε a=2, b=6, και c=3, οπότε από τον τύπο (2.14α) βρίσκουμε το r, $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{49}=7$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.13) βρίσκουμε ότι, l= $\cos α=\frac{2}{7}$, m=$\cos β=\frac{6}{7}$, και n=$\cos γ=\frac{3}{7}$.

2.2.7 **Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο** (scalar product)

Δίνονται δύο διανύσματα **a** και **b**. Ορίζουμε ως *εσωτερικό* ή *βαθμωτό γινόμενο* (scalar ή dot product) των δύο διανυσμάτων τον αριθμό,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta\,, \qquad (2.15)$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων (Σχ. 2.11).



Σχήμα 2.11 Τα διανύσματα **a** και **b**, και η γωνία θ που σχηματίζουν.

2.2.7.1 Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

Το εσωτερικό γινόμενο είναι ένας αριθμός και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες,

α) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$, (αντιμεταθετική ιδιότητα)

β) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, (προσεταιριστική ιδιότητα)

γ) $\kappa(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\kappa\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\kappa\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\kappa$, (κ=αριθμός)

δ) Το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του είναι το μέτρο του στο τετράγωνο,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2\cos 0 = a^2. \qquad (2.16)$$

ε) Το εσωτερικό γινόμενο δύο μοναδιαίων διανυσμάτων **i** και **j** σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ισούται με μηδέν, διότι οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους, οπότε θ=π/2,

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 1^2\cos(\pi/2) = 0. \qquad (2.17)$$

Επίσης το εσωτερικό γινόμενο καθενός μοναδιαίου διανύσματος με τον εαυτό του είναι η μονάδα,

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1^2\cos 0 = 1 = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}. \tag{2.18}$$

στ) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συντεταγμένων τους. Έτσι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ και $\mathbf{b}=5\mathbf{i}+7\mathbf{j}$, όπου **i** και **j** είναι τα μονιαδιαία διανύσματα, είναι,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (3\mathbf{i}+4\mathbf{j})\cdot(5\mathbf{i}+7\mathbf{j}) =$$
$$= 3\mathbf{i}\cdot(5\mathbf{i}+7\mathbf{j}) + 4\mathbf{j}\cdot(5\mathbf{i}+7\mathbf{j}) =$$
$$= 15\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + 21\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + 20\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + 28\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} =$$
$$= 15 + 0 + 0 + 28 = 43.$$

ζ) Το εσωτερικό γινόμενο δύο παράλληλων διανυσμάτων **a** και **b** σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ισούται με το γινόμενο των μέτρων τους,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos 0 = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|. \tag{2.19}$$

η) Εάν έχουμε τα διανύσματα $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\beta_1\mathbf{j}+\gamma_1\mathbf{k}$ και $\mathbf{b}=\alpha_2\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\gamma_2\mathbf{k}$, τότε το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ δίνεται από την σχέση,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 + \gamma_1\,\gamma_2. \tag{2.20}$$

Η απόδειξη της σχέσης (2.20) γίνεται πολλαπλασιάζοντας τα δύο διανύσματα, όπως έγινε στο παράδειγμα της ιδιότητας στ), και με την χρήση της ιδιότητας ε).

Έχουμε επίσης,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2. \tag{2.21}$$

2.2.7.2 *Παράδειγμα 1*

Εάν $\mathbf{a}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Λύση

Για τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ χρησιμοποιούμε τον τύπο (2.20). Έτσι έχουμε,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5 \cdot 6+(-2) \cdot 3+3 \cdot (-5) = 30-6-15 = 9.$$

2.2.7.3 *Παράδειγμα 2*

Εάν $\mathbf{a}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ να βρεθεί: α) το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, και β) το $|\mathbf{a}|^2$.

Λύση

α) Από τον τύπο (2.21) έχουμε,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 5^2+(-2)^2+3^2 = 25+4+9 = 38.$$

β) Έχουμε από την ιδιότητα ζ) της παραγράφου 2.2.7.1 ότι,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 38.$$

2.2.7.4 *Παράδειγμα 3*

Εάν $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ και $\mathbf{b}= 2\mathbf{i}-8\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ και η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

Λύση

Για τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ χρησιμοποιούμε τον τύπο (2.20), οπότε έχουμε,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2+2 \cdot (-8)+6 \cdot 3 = 6-16+18 = 8.$$

Επιπλέον, για τον υπολογισμό της γωνίας μεταξύ των δύο διανυσμάτων χρησιμοποιούμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου (2.15),

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta \;\Leftrightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \;\Leftrightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{8}{7\sqrt{77}} = 0.1302 \;\Leftrightarrow$$

$$\theta = 82.5^{o} \text{ ή } 1.4402 \text{ ακτίνια (radians)},$$

όπου $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$, και $|\mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{77}$.

2.2.8 Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο (vector product)

Εκτός από το εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε ένα δεύτερο γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων, το **εξωτερικό γινόμενο** ή **διανυσματικό γινόμενο** (vector product). Το εξωτερικό γινόμενο δίνεται από τον τύπο,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = ab\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}, \tag{2.22}$$

όπου a,b είναι τα μέτρα των δύο διανυσμάτων, θ είναι η γωνία των διανυσμάτων και $\hat{\mathbf{n}}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο και στα δύο διανύσματα, με διεύθυνση που δίνεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία. Σε αντίθεση με το εσωτερικό γινόμενο, που είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα διάνυσμα. Έτσι έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά.

Σχήμα 2.12 Τα διανύσματα **a** και **b**, η γωνία θ που σχηματίζουν.

2.2.8.1 Ιδιότητες διανυσματικού γινομένου

Το διανυσματικό γινόμενο είναι ένα διάνυσμα και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, α) Το διανυσματικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του είναι μηδέν, διότι η γωνία είναι μηδέν και συνεπώς sin0=0.

β) Έχουμε ότι το διανυσματικό γινόμενο δεν είναι πράξη αντιμεταθετική, διότι ισχύει,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}\,, \tag{2.23}$$

ως συνέπεια του κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

γ) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, (επιμεριστική ιδιότητα)

δ) $\kappa\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\kappa\cdot\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\kappa\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\cdot\kappa$, (κ=αριθμός)

ε) Εάν **i**, **j**, και **k** είναι μοναδιαία διανύσματα τότε ισχύουν οι σχέσεις,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j},\ \text{και } \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}. \tag{2.25}$$

στ) Εάν $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \beta_1\mathbf{j} + \gamma_1\mathbf{k}$, και $\mathbf{b} = \alpha_2\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \gamma_2\mathbf{k}$ είναι δύο διανύσματα, τότε έχουμε,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (\alpha_1\mathbf{i} + \beta_1\mathbf{j} + \gamma_1\mathbf{k}) \times (\alpha_2\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \gamma_2\mathbf{k}) = \\ &= \alpha_1\alpha_2\,\mathbf{i}\times\mathbf{i} + \alpha_1\beta_2\,\mathbf{i}\times\mathbf{j} + \alpha_1\gamma_2\,\mathbf{i}\times\mathbf{k} + \beta_1\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{i} + \beta_1\beta_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{j} + \\ &\quad + \beta_1\gamma_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{k} + \gamma_1\alpha_2\,\mathbf{k}\times\mathbf{i} + \gamma_1\beta_2\,\mathbf{k}\times\mathbf{j} + \gamma_1\gamma_2\,\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \\ &= \alpha_1\alpha_2\cdot 0 + \alpha_1\beta_2\,\mathbf{k} + \alpha_1\gamma_2\,(-\mathbf{j}) + \beta_1\alpha_2\,(-\mathbf{k}) + \beta_1\beta_2\cdot 0 + \\ &\quad + \beta_1\gamma_2\,\mathbf{i} + \gamma_1\alpha_2\,\mathbf{j} + \gamma_1\beta_2\,(-\mathbf{i}) + \gamma_1\gamma_2\cdot 0 = \\ &= (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\,\mathbf{i} + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)\,\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\,\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Εάν μετασχηματίσουμε την σχέση (2.26) έχουμε,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\,\mathbf{i} - (\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2)\,\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\,\mathbf{k}, \tag{2.27}$$

που θυμίζει το ανάπτυγμα μίας ορίζουσας. Δηλαδή, ισχύει ότι,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \tag{2.28}$$

ζ) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές **a** και **b** δίνεται από το μέτρο του διανυσματικού γινομένου $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

η) Εάν ισχύει ότι $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, και $\mathbf{a}, \mathbf{b}\neq 0$, τότε $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

2.2.8.2 *Παράδειγμα 1*

Εάν **a=**5**i**-2**j**+3**k** και **b=** 6**i**+3**j**-5**k** να βρεθεί το εξωτερικό γινόμενο **a** × **b**.

Λύση

Για τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου **a** × **b** χρησιμοποιούμε τον τύπο (2.28). Έτσι έχουμε,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 5 & -2 & 3\\ 6 & 3 & -5\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -5\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}5 & 3\\ 6 & -5\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 6 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}\,(10-9)-\mathbf{j}\,(-25-18)+\mathbf{k}(15+18)=\mathbf{i}+43\mathbf{j}+33\mathbf{k}.$$

2.2.8.3 *Παράδειγμα 2*

Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ όταν τα σημεία Α, Β, και Γ έχουν συντεταγμένες (0,2,1), (2,1,2), και (1,1,3), αντίστοιχα.

Λύση

Έχουμε ότι **a**= $\vec{AB}$ =(2-0)**i** +(1-2)**j** +(2-1)**k** = 2**i** -2**j** +**k**, και **b**= $\vec{A\Gamma}$ =(1-0)**i** +(1-2)**j** +(3-1)**k** = **i** -**j** +2**k**. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$. Δηλαδή έχουμε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι το μέτρο του διανύσματος,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}\,(-4+1)-\mathbf{j}\,(4-1)+\mathbf{k}(-2+2)=-3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+0\mathbf{k},$$

οπότε είναι $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Άρα, το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2.2.8.4 *Παράδειγμα 3*

Να μελετηθεί η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο.

<u>Λύση</u>

Το πρόβλημα της κίνησης ενός φορτισμένου σωματιδίου εντός μαγνητικού πεδίου είναι μία κλασσική εφαρμογή του διανυσματικού γινομένου. Εάν το φορτισμένο σωματίδιο έχει ταχύτητα $\mathbf{u}$ και κινείται σε ένα μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}$, τότε στο σωματίδιο ασκείται μία δύναμη, $\mathbf{F}$, κάθετη και στα δύο, $\mathbf{u}$ και $\mathbf{B}$, η οποία είναι ανάλογη του διανυσματικού γινομένου $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$. Αυτή η δύναμη χρησιμοποιείται για να κατευθύνουμε την δέσμη (beam) σε μία τηλεοπτική λυχνία. Εάν το σωματίδιο έχει φορτίο q, τότε η δύναμη αυτή δίνεται από τον τύπο,

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{u}\times\mathbf{B}, \qquad (2.29)$$

όπου $\mathbf{u}$ η ταχύτητα (ms^{-1}), $\mathbf{B}$ είναι η μαγνητική επαγωγή (T), q είναι το φορτίο (C), και $\mathbf{F}$ είναι η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο (N). Να σημειώσουμε ότι η δύναμη είναι ένα διανυσματικό μέγεθος και υπολογίζεται με ένα διανυσματικό γινόμενο. Η διεύθυνση της δύναμης είναι κάθετη στην ταχύτητα και την μαγνητική επαγωγή, και η φορά βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

Σχήμα 2.13 Η δύναμη **F** που ασκείται σε σωματίδιο με φορτίο q, όταν αυτό κινείται με ταχύτητα **u** μέσα σε μαγνητικό πεδίο **B**.

2.2.8.5 *Παράδειγμα 4*

Ένα ηλεκτρικό φορτίο q, το οποίο κινείται με ταχύτητα **u**, δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή **B**, η οποία δίνεται από τον τύπο,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu q}{4\pi}\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}, \tag{2.30}$$

όπου μ μία σταθερά. Να βρεθεί η μαγνητική επαγωγή **B**, εάν έχουμε ότι **r**=3**i+j**-2**k** και **u**= **i-**2**j**+3**k**.

Λύση

Για να υπολογισθεί η μαγνητική επαγωγή **B**, χρειάζεται να υπολογισθεί το μέτρο του διανύσματος **r**, καθώς και το διανυσματικό γινόμενο **u**×**r**. Έτσι, έχουμε ότι το μέτρο του **r** είναι,

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{3^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14},$$

και το διανυσματικό γινόμενο **u**×**r** είναι,

$$\mathbf{u}\times\mathbf{r} = [(-2)\cdot(-2) - 3\cdot 1]\,\mathbf{i} - [1\cdot(-2) - 3\cdot 3]\,\mathbf{j} + [1\cdot 1 - (-2)\cdot 3)\,\mathbf{k} =$$
$$= (4-3)\mathbf{i} - (-2-9)\mathbf{j} + (1+6)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Άρα, η μαγνητική επαγωγή **B** είναι,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu q}{4\pi}\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{\mu q}{4\pi}\frac{\mathbf{i}+11\mathbf{j}+7\mathbf{k}}{\left(\sqrt{14}\right)^2} = \frac{\mu q}{4\pi}\frac{\mathbf{i}+11\mathbf{j}+7\mathbf{k}}{14} = \frac{\mu q}{56\pi}(\mathbf{i}+11\mathbf{j}+7\mathbf{k}).$$

2.2.9 Γινόμενο τριών διανυσμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με διανυσματικά γινόμενα τριών διανυσμάτων.

α) *Βαθμωτό τριπλό γινόμενο* (scalar triple product)

Εάν **a** = α_1**i** + β_1**j** + γ_1**k**, **b** = α_2**i** + β_2**j** + γ_2**k**, και **c** = α_3**i** + β_3**j** + γ_3**k**, είναι τρία διανύσματα, τότε το γινόμενο **a**·(**b**×**c**) καλείται *βαθμωτό τριπλό γινόμενο*. Έτσι, λοιπόν, είναι,

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

οπότε έχουμε,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\alpha_1\mathbf{i}+\beta_1\mathbf{j}+\gamma_1\mathbf{k})\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{2.31}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει εάν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη γραμμή της ορίζουσας με την παρένθεση (ιδιότητες οριζουσών), και ταυτοχρόνως λάβουμε υπ' όψιν μας τις ιδιότητες,

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0, \text{ και } \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1.$$

Έχουμε επίσης ότι,

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \tag{2.32}$$

διότι εάν εναλλάξουμε δύο γραμμές σε μία ορίζουσα αντιστρέφεται το πρόσημο. Εάν τώρα εναλλάξουμε τις γραμμές 2 και 3 της σχέσης (2.32) έχουμε,

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{2.32}$$

Ισχύει εν γένει ότι,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{2.33}$$

Δηλαδή, το βαθμωτό τριπλό γινόμενο ισχύει εάν εναλλάξουμε κυκλικά τα τρία διανύσματα που χρησιμοποιούμε. Εάν αλλάξουμε τα διανύσματα, αλλά όχι σε κυκλική μορφή, τότε αλλάζει το πρόσημο του βαθμωτού τριπλού γινομένου,

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{2.34}$$

β) *Διανυσματικό τριπλό γινόμενο* (vector triple products)

Εάν $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \beta_1\mathbf{j} + \gamma_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \alpha_2\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \gamma_2\mathbf{k}$, και $\mathbf{c} = \alpha_3\mathbf{i} + \beta_3\mathbf{j} + \gamma_3\mathbf{k}$, είναι τρία διανύσματα, τότε τα γινόμενα $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ και $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ καλείται *διανυσματικό τριπλό γινόμενο*. Το διάνυσμα $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων **b** και **c**, και το διάνυσμα $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ είναι κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων **a** και $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, δηλαδή συνεπίπεδο με τα διανύσματα **b** και **c**.

Έχουμε ότι,

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{2.35}$$

Επομένως, έχουμε,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma_2 & \alpha_2 \\ \gamma_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \tag{2.36}$$

Η τελευταία ορίζουσα της σχέσης (2.36) εάν αναπτυχθεί περαιτέρω καθίσταται αρκετά κουραστική, εν τούτοις, ένα παράδειγμα ξεκαθαρίζει αρκετά καλά την διαδικασία.

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, και $\mathbf{c} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$. Να υπολογισθεί το γινόμενο $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε πρώτα το γινόμενο $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Έτσι, έχουμε,

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(3+2) - \mathbf{j}\,(9-2) + \mathbf{k}\,(-3-1) = 5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το γινόμενο,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -7 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-12-35) - \mathbf{j}\,(-8+25) + \mathbf{k}\,(-14-15) = -47\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 29\mathbf{k}.$$

γ) Ισχύουν επίσης οι σχέσεις,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}, \tag{2.37}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}. \tag{2.38}$$

Η απόδειξη των σχέσεων (2.37) και (2.38) στηρίζεται στη σχέση (2.36) και στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου.

δ) Ισχύει ότι,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.39}$$

αφού δύο γραμμές της ορίζουσας είναι ίδιες.

ε) Ισχύει η σχέση,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}, \tag{2.40}$$

Δηλαδή το εσωτερικό και διανυσματικό γινόμενο μπορούν να εναλλαγούν χωρίς να μεταβληθεί το αποτέλεσμα.

στ) Έχουμε, τέλος, ότι,

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}), \tag{2.41}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}. \tag{2.42}$$

2.2.9.1 *Σημείωση*

Το βαθμωτό τριπλό γινόμενο παρέχει ένα τρόπο για να ελέγχουμε εάν τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα. Από τον ορισμό του διανυσματικού γινομένου έχουμε, ότι το γινόμενο ($\mathbf{b}\times\mathbf{c}$) είναι ένα διάνυσμα με μέτρο $|\mathbf{b}||\mathbf{c}|$, κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων **b** και **c**.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **a** και **d**, είναι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$, με $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=|\mathbf{a}||\mathbf{d}|\cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία των **a** και **d**. Εάν θ=π/2, τότε $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=|\mathbf{a}||\mathbf{d}|\cos\frac{\pi}{2}=0$.

<u>Πρόταση.</u> Εάν, λοιπόν, $\mathbf{d}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, συνδυάζοντας τα παραπάνω δύο αποτελέσματα, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι, εάν **a** είναι ένα τρίτο διάνυσμα κάθετο στο $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, τότε τα τρία διανύσματα **a**, **b** και **c**, είναι συνεπίπεδα εάν ισχύει ότι $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$.

2.2.9.2 *Παράδειγμα 1*

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{a} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, και $\mathbf{c} = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, είναι συνεπίπεδα.

<u>Λύση</u>

Για να εξετάσουμε εάν τα τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα υπολογίζουμε το γινόμενο,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-2)-2(-2-6)-3(2+3)=0.$$

Εφ’ όσον το γινόμενο είναι μηδέν τα διανύσματα είναι συνεπίπεδα.

2.2.9.3 *Παράδειγμα 2*

Να προσδιορισθεί η τιμή του p έτσι ώστε τα τρία διανύσματα $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+p\mathbf{k}$, και $\mathbf{c} = \mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, να είναι συνεπίπεδα.

<u>Λύση</u>

Εφ’ όσον τα τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα θα ισχύει ότι το γινόμενο,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & p \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-4p)-1(6-p)+4(12-2)=$$

$$=8-8p-6+p+40=42-7p\,,$$

είναι μηδέν, οπότε έχουμε ότι,

$$42\text{-}7p = 0 \Leftrightarrow p = 42/7 = 6.$$

Σημείωση

Το βαθμωτό τριπλό γινόμενο αποδεικνύεται ότι δίνει τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα τρία διανύσματα. Στο πρόγραμμα MATLAB είναι εύκολο να υπολογίσουμε τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου χρησιμοποιώντας την παρακάτω μέθοδο. Πρώτα καθορίζουμε τις συντεταγμένες των τριών διανυσμάτων έστω **a**(2,0,0), **b**(15,15,0), και **c**(15,0,20), με τις εντολές,

```
» a=[2 0 0];
» b=[15 15 0];
» c=[15 0 20];
```

και στη συνέχεια υπολογίσουμε τον όγκο με την εντολή,

```
» volume=det([a;b;c])
```

Το αποτέλεσμα δίνει ότι ο όγκος είναι 600.

Απόρροια της παραπάνω σημειώσεως είναι ότι εάν ο όγκος ενός παραλληλεπιπέδου, οριζομένου από τρία διανύσματα, είναι μηδέν, τότε τα διανύσματα είναι συνεπίπεδα. Άρα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το πρόγραμμα MATLAB για να ελεγθεί, εάν τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα ή όχι.

Άσκηση

Να εξετασθεί, χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα MATLAB, εάν τα διανύσματα του παραπάνω Παραδείγματος 1 είναι συνεπίπεδα.

2.2.10 Λυμένες Ασκήσεις

2.2.10.1 *Άσκηση 1*

Εάν η μαγνήτιση **M** ενός κόκκου ενός μαγνητικού υλικού, και το ολικό μαγνητικό πεδίο **H** ενός συγκεκριμμένου κόκκου έχουν συντεταγμένες, **M**=(M_x,M_y,M_z), και **H**=(H_x,H_y,H_z), αντίστοιχα, τότε έχουμε ότι,

α) $\mathbf{M}\times\mathbf{H} = (M_yH_z - M_zH_y,\ M_zH_x - M_xH_z,\ M_xH_y - M_yH_z)$, και (2.43)

β) $\mathbf{M}\times(\mathbf{M}\times\mathbf{H}) = [M_xM_yH_y - (M_y)^2 H_x - (M_z)^2 H_x + M_xM_zH_z,\ M_yM_zH_z - (M_z)^2 H_y -$
$-(M_x)^2 H_y + M_xM_yH_x,\ M_xM_zH_x - (M_x)^2 H_z - (M_y)^2 H_z + M_yM_zH_y]$. (2.44)

Λύση

α) Η απόδειξη είναι απόρροια του ορισμού του διανυσματικού γινομένου των διανυσμάτων **M** και **H** (να γίνει ως άσκηση).

β) Η απόδειξη προκύπτει από την εφαρμογή του διανυσματικού γινομένου στα διανύσματα **M** και **M**×**H** (να γίνει ως άσκηση).

2.2.10.2 *Άσκηση 2*

Ένα αεροπλάνο πετά με 800 Km/h με ένα δυνατό βόρειο-δυτικό άνεμο εντάσεως 90 Km/h. Το αεροπλάνο θέλει να πετάξει δυτικά. Σε ποιά κατεύθυνση θα πρέπει να πετάξει το αεροπλάνο για να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός, και ποιά θα είναι η πραγματική ταχύτητα του αεροπλάνου (η ταχύτητά του που μετρά ένας παρατηρητής στο έδαφος);

Λύση

Η ταχύτητα εδάφους του αεροπλάνου θα είναι το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας του ανέμου 90 Km/h βόρειο-δυτικά και της ταχύτητάς του των 800 Km/h σε γωνία, έστω, a^o προς τα βόρειο-δυτικά (Σχ. 2.14). Το διάνυσμα $\vec{A\Delta}$ παριστάνει την ταχύτητα του ανέμου, και το $\vec{AB}$ την ταχύτητα του αεροπλάνου. Η ζητούμενη ταχύτητα είναι το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$, με κατεύθυνση δυτικά. Εάν αναλύσουμε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Delta}$ στις δύο συνιστώσες τους στους δύο άξονες, θα έχουμε ότι,

$$\left|\vec{AB}\right| \sin a^{o} = \left|\vec{A\Delta}\right| \sin 45^{o} \Rightarrow 800 \sin a^{o} = 90 \sin 45^{o} \Rightarrow \sin a^{o} = \frac{90 \sin 45^{o}}{800} \Rightarrow$$

$$\sin a^{o} = \frac{9\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{80} = \frac{9\,\sqrt{2}}{160} = 0.0957 \Rightarrow a^{o} = 0.0958 \text{ ακτίνια ή } 5.49^{o},$$

επειδή στον άξονα βοράς-νότος δεν υπάρχει κίνηση του αεροπλάνου για τον παρατηρητή, άρα οι δύο συνιστώσες θα είναι ίσες.

Τέλος, η ζητούμενη ταχύτητα είναι,

$$\left|\vec{AB}\right| \cos a^{o} - \left|\vec{A\Delta}\right| \cos 45^{o} = 513.98 \text{ Km/h}.$$

Σχήμα 2.14 Η κίνηση του αεροπλάνου.

2.2.10.3 *Άσκηση 3*

Δίνονται τα διανύσματα **a** = 7**i-j+k**, **b** = 3**i**-**j**-2**k**, και **c** = 9**i+j**-3**k**. Να υπολογισθεί το γινόμενο **a**×(**b**×**c**).

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε πρώτα το γινόμενο **b**×**c**. Έτσι, έχουμε,

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 9 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(3+2) - \mathbf{j}\,(-9+18) + \mathbf{k}\,(3+9) = 5\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 12\mathbf{k}\,.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το γινόμενο,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & -1 & 1 \\ 5 & -9 & 12 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-12+9) - \mathbf{j}\,(84-5) + \mathbf{k}\,(-63+5) = -3\mathbf{i} - 79\mathbf{j} - 58\mathbf{k}\,.$$

2.2.10.4 *Άσκηση 4*

Τα σημεία Α, Β, και Γ έχουν συντεταγμένες (1,-1,2), (9,0,8), και (5,0,5), αντίστοιχα. Να βρεθούν: α) τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$, και β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Έχουμε ότι $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}=(9-1)\mathbf{i}+(0+1)\mathbf{j}+(8-2)\mathbf{k} = 8\mathbf{i}+\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, και $\mathbf{b}=\overrightarrow{A\Gamma}=(5-1)\mathbf{i}+(0+1)\mathbf{j}+(5-2)\mathbf{k} = 4\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Δηλαδή έχουμε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι το μέτρο του διανύσματος,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\,(-3-6) - \mathbf{j}\,(24-24) + \mathbf{k}(8-4) = -9\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

οπότε είναι $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{(-9)^2 + 4^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97} = 9.8489$. Άρα, το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \frac{9.8489}{2} = 4.9245$.

2.2.10.5 *Άσκηση 5*

Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα **a**=3**i**+5**j**-**k** και **b**=**i**+3**j**-**k**.

Λύση

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα **a** και **b**, είναι το μέτρο του διανύσματος,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 5 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}\,(-5+3)-\mathbf{j}\,(-3+1)+\mathbf{k}(9-5)=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}.$$

οπότε το εμβαδό είναι $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}=4.8990$.

2.2.10.6 *Άσκηση 6*

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα με συντεταγμένες (3,2,-1), (5,-7,3), και (11,-3,1), είναι συνεπίπεδα.

Λύση

Έχουμε ότι **a** = 2**i**-9**j**+4**k**, **b** = 8**i**-5**j**+2**k**, και **c** = 6**i**+4**j**-2**k**, Για να εξετάσουμε εάν τα τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα υπολογίζουμε το γινόμενο,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}2 & -9 & 4\\ 8 & -5 & 2\\ 6 & 4 & -2\end{vmatrix}=2(10-8)+9(-16-12)+4(32+30)=4-252+248=0.$$

Εφ' όσον το γινόμενο είναι μηδέν τα διανύσματα είναι συνεπίπεδα.

2.3 Διανυσματικές συναρτήσεις

Ας θεωρήσουμε τα μοναδιαία διανύσματα **i**, **j** και **k** των αξόνων x, y, και z, αντίστοιχα. Ορίζουμε ως **διανυσματική συνάρτηση**, την συνάρτηση που ορίζεται από την σχέση,

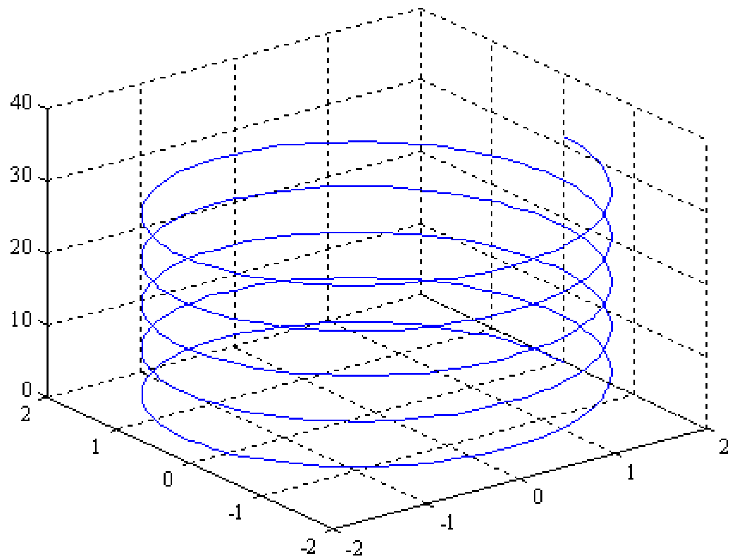
$$\mathbf{F}(t)=a_1(t)\,\mathbf{i}+a_2(t)\,\mathbf{j}+a_3(t)\,\mathbf{k}\,, \tag{2.45}$$

όπου $a_1(t)$,$a_2(t)$, και $a_3(t)$ είναι συναρτήσεις του t, και οι τιμές της **F** είναι διανύσματα.

Διανυσματικές συναρτήσεις χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος στον χώρο ή στο επίπεδο.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{F}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$. Η $\mathbf{F}(t)$ είναι μία διανυσματική συνάρτηση και έχει για γραφική παράσταση ένα έλικα, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z, όπως φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 2.15. Έτσι σε κάθε τιμή του t αντιστοιχεί ένα διάνυσμα στον χώρο.



Σχήμα 2.15 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{F}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$.

2.3.1 Όρια διανυσματικών συναρτήσεων

Η έννοια του ορίου ορίζεται αντίστοιχα όπως και στις πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής. Έχουμε, λοιπόν, ότι το **όριο** μίας διανυσματικής συνάρτησης **F**(t) με τύπο, $\mathbf{F}(t)=a_1(t)\mathbf{i}+a_2(t)\mathbf{j}+a_3(t)\mathbf{k}$, καθώς το t τείνει στον αριθμό t_0, είναι το διάνυσμα **L**, εάν και μόνο εάν το όριο του $|\mathbf{F}(t)-\mathbf{L}|$ είναι το μηδέν όταν το t τείνει στο t_0. Δηλ.,

$$\mathbf{L} = \lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t) \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0}|\mathbf{F}(t)-\mathbf{L}| = 0. \qquad (2.46)$$

Ο ορισμός δηλώνει ότι οι συνιστώσες της συνάρτησης **F**(t) έχουν όρια τις συνιστώσες του διανύσματος **L**. Δηλαδή, εάν $\mathbf{L}=L_1\mathbf{i}+L_2\mathbf{j}+L_3\mathbf{k}$, τότε $\lim a_1(t)= L_1$, $\lim a_2(t)= L_2$, και $\lim a_3(t)= L_3$. Επομένως, για να βρούμε το όριο μίας διανυσματικής συνάρτησης, αρκεί να βρούμε τα όρια των συνιστωσών της.

2.3.1.1 *Παράδειγμα 1*

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $\mathbf{F}(t)=(t-1)\mathbf{i}+5\mathbf{j}+8t\mathbf{k}$, όταν το t τείνει στο 1.

<u>*Λύση*</u>

Τα όρια των συνιστωσών της συνάρτησης **F**(t) όταν το t τείνει στο 1 είναι, $\lim_{t\to 1}(t-1)=0$, $\lim_{t\to 1}5=5$, και $\lim_{t\to 1}8t=8$. Οπότε έχουμε ότι $\lim_{t\to 1}\mathbf{F}(t)=5\mathbf{j}+8\mathbf{k}$.

2.3.1.2 *Παράδειγμα 2*

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $\lim_{t\to -3}\mathbf{F}(t)=\dfrac{t^2+5t+6}{t+3}\mathbf{i}+\ln(4+t)\mathbf{j}$.

<u>*Λύση*</u>

Τα όρια των συνιστωσών της συνάρτησης **F**(t) όταν το t τείνει στο -3 είναι, $\lim_{t\to -3}\dfrac{t^2+5t+6}{t+3}=\lim_{t\to -3}(t+2)=-1$, $\lim_{t\to -3}(\ln(4+t))=\lim_{t\to -3}(\ln(4-3))=\lim_{t\to -3}(\ln 1)=0$. Οπότε έχουμε ότι $\lim_{t\to -3}\mathbf{F}(t)=-\mathbf{i}$.

2.3.2 Συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων

Όπως και με την έννοια του ορίου έτσι και η έννοια της συνέχειας ορίζεται αντίστοιχα όπως και στις πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής. Έχουμε, λοιπόν, ότι μία διανυσματική συνάρτηση **F**(t) με τύπο, $\mathbf{F}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k}$, είναι **συνεχής** στο $t=t_0$, εάν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)$, εάν η συνάρτηση ορίζεται στο $t=t_0$, και ισχύει ότι,

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0)\,. \tag{2.47}$$

Όπως και με τον ορισμό του ορίου, έτσι και με την συνέχεια, για να είναι συνεχής η συνάρτηση **F**(t) αρκεί οι συνιστώσες της να είναι συνεχείς στο $t=t_0$.

2.3.2.1 *Παράδειγμα 1*

Για ποιές τιμές του t η συνάρτηση $\mathbf{F}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, είναι συνεχής;

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση **F**(t) είναι συνεχής για κάθε $t\in\Re$, διότι οι συνιστώσες της, cost, sint, και 1, είναι συνεχείς συναρτήσεις για κάθε $t\in\Re$.

2.3.2.2 *Παράδειγμα 2*

Για ποιές τιμές του t η συνάρτηση $\mathbf{F}(t) = e^t\,\mathbf{i} + \cos\dfrac{1}{t-1}\,\mathbf{j} + \ln|5+t|\,\mathbf{k}$, είναι συνεχής;

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση **F**(t) είναι συνεχής για κάθε t, στο οποίο οι συνιστώσες της, e^t, $\cos\dfrac{1}{t-1}$, και $\ln|5+t|$, είναι συνεχείς συναρτήσεις. Οι συνιστώσες e^t και $\ln|5+t|$ είναι συνεχείς για κάθε t. Άρα, θα πρέπει να είναι συνεχής και η συνιστώσα $\cos\dfrac{1}{t-1}$, η οποία είναι συνεχής για κάθε t διάφορο του 1. Άρα η **F**(t) είναι συνεχής για κάθε $t\neq 1$.

2.3.3 Παραγώγιση διανυσματικών συναρτήσεων

Μία διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(t)$ με τύπο, $\mathbf{F}(t)=\alpha_1(t)\mathbf{i}+\alpha_2(t)\mathbf{j}+\alpha_3(t)\mathbf{k}$, είναι **παραγωγίσιμη** στο $t=t_0$, εάν και μόνο εάν κάθε συνιστώσα της είναι παραγωγίσιμη στο $t=t_0$. Εάν ισχύει αυτό τότε έχουμε,

$$\mathbf{F}'(t)=\alpha_1'(t)\mathbf{i}+\alpha_2'(t)\mathbf{j}+\alpha_3'(t)\mathbf{k}. \tag{2.48}$$

2.3.3.1 *Παράδειγμα 1*

Να βρεθεί η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(t)=e^{3t}\,\mathbf{i}+te^{-2t}\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Λύση

Η παράγωγος της συνάρτησης $\mathbf{F}(t)$ βρίσκεται εάν παραγωγίσουμε κάθε συνιστώσα της. Έτσι, έχουμε ότι,

$\alpha_1'(t)=(e^{3t})'=3e^{3t}$, $\alpha_2'(t)=(te^{3t})'=e^{3t}+t(e^{3t})'= \;=e^{3t}+3te^{3t}$, και $\alpha_3'(t)=(1)'=0$.

Άρα, η παράγωγος της $\mathbf{F}(t)$ είναι, $\mathbf{F}'(t)=3e^{3t}\,\mathbf{i}+(e^{3t}+3e^{3t})\,\mathbf{j}$.

2.3.3.2 *Παράδειγμα 2*

Να βρεθεί η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(t)$ με τύπο, $\mathbf{F}(t)=\dfrac{5t-1}{5t+1}\mathbf{i}+\ln(1-9t^2)\,\mathbf{j}+(3t^2+2)\mathbf{k}$.

Λύση

Για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $\mathbf{F}(t)$ θα πρέπει να βρούμε τις παραγώγους των συνιστωσών της. Έτσι, έχουμε ότι $\alpha_1'(t)=\left(\dfrac{5t-1}{5t+1}\right)'=$

$=\dfrac{5(5t+1)-5(5t-1)}{(5t+1)^2}=\dfrac{25t+5-25t+5}{(5t+1)^2}=\dfrac{10}{(5t+1)^2}$, $\alpha_2'(t)=(\ln(1-9t^2))'=\dfrac{(1-9t^2)'}{(1-9t^2)}=$

$=\dfrac{18t}{(1-9t^2)}$, και $\alpha_3'(t)=(3t^2+2)'=6t$.

Άρα, η παράγωγος της **F**(t) είναι, $\mathbf{F}'(t)=\frac{10}{(5t+1)^2}\mathbf{i}+\frac{18t}{(1-9t^2)^2}\mathbf{j}+6t\mathbf{k}$.

2.3.3.3 *Παράδειγμα 3*

Ένα σωματίδιο κινείται στο χώρο έτσι ώστε η θέση του στο χρόνο t, δίνεται από τις συνιστώσες $x=5t+2$, $y=2t^2+4t$, και $z=3t^3+5t^2$. Να βρεθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας του σωματιδίου και της επιτάχυνσής του, όταν t=2.

Λύση

Η θέση του σωματιδίου δίνεται από ένα διάνυσμα **r**,

$$\mathbf{r}(t)=(5t+2)\mathbf{i}+(2t^2+4t)\mathbf{j}+(3t^3+5t^2)\mathbf{k}.$$

Για να βρούμε την ταχύτητα του σωματιδίου αρκεί να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης **r**(t), δηλαδή θα πρέπει να βρούμε τις παραγώγους των συνιστωσών της. Έτσι, έχουμε ότι,

$\alpha_1'(t)=(5t+2)'=5$, $\alpha_2'(t)=(2t^2+4t)'=4t+4$, και $\alpha_3'(t)=(3t^3+5t^2)'=9t^2+10t$.

Άρα, η παράγωγος της **r**(t), δηλαδή η ταχύτητα **υ**, είναι,

$$\boldsymbol{\upsilon}(t)=\mathbf{r}'(t)=5\mathbf{i}+(4t+4)\mathbf{j}+(9t^2+10t)\mathbf{k}.$$

Για t=2, έχουμε, $\boldsymbol{\upsilon}(2)=5\mathbf{i}+12\mathbf{j}+56\mathbf{k}$.

Για να βρούμε, τώρα, την επιτάχυνση του σωματιδίου αρκεί να βρούμε την παράγωγο της ταχύτητας **υ**(t). Έτσι, έχουμε ότι,

$\alpha_1'(t)=(5)'=0$, $\alpha_2'(t)=(4t+4)'=4$, και $\alpha_3'(t)=(9t^2+10t)'=18t+10$.

Άρα, η δεύτερη παράγωγος της **r**(t), δηλαδή η επιτάχυνση **γ**, είναι,

$$\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{\upsilon}'(t)=\mathbf{r}''(t)=4\mathbf{j}+(18t+10)\mathbf{k}.$$

Τέλος, για t=2, έχουμε, $\boldsymbol{\gamma}(2)=4\mathbf{j}+46\mathbf{k}$.

2.3.4 Αλυσιδωτή παραγώγιση διανυσματικών συναρτήσεων

Εάν μία διανυσματική συνάρτηση **F**(t) με τύπο, $\mathbf{F}(t)=\alpha_1(t)\mathbf{i}+\alpha_2(t)\mathbf{j}+\alpha_3(t)\mathbf{k}$, είναι παραγωγίσιμη, και η συνάρτηση t=g(s) είναι παραγωγίσιμη ως προς s, τότε έχουμε ότι για την σύνθετη συνάρτηση **F**(g(s)) ισχύει ο τύπος της **αλυσιδωτής παραγώγισης**,

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{ds} = \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\frac{dt}{ds}. \tag{2.49}$$

Πιό αναλυτικά έχουμε ότι,

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{ds} = \frac{d\alpha_1(t)}{dt}\frac{dt}{ds}\mathbf{i} + \frac{d\alpha_2(t)}{dt}\frac{dt}{ds}\mathbf{j} + \frac{d\alpha_3(t)}{dt}\frac{dt}{ds}\mathbf{k}, \tag{2.50}$$

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{ds} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\alpha_2(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{d\alpha_3(t)}{dt}\mathbf{k}\right)\frac{dt}{ds} = \left(\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\right)\frac{dt}{ds}. \tag{2.51}$$

2.3.4.1 *Παράδειγμα 1*

Να βρεθεί η παράγωγος **F**'(s) ως συνάρτηση του t εάν έχουμε ότι, $\mathbf{F}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}$ και $\frac{dt}{ds} = t$.

Λύση

Η παράγωγος της συνάρτησης **F**(s) βρίσκεται από τον τύπο (2.51). Έτσι έχουμε ότι,

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{ds} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\alpha_2(t)}{dt}\mathbf{j}\right)\frac{dt}{ds} = \left(\frac{d\mathbf{F}(t)}{ds}\right)\frac{dt}{ds},$$

οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους των συνιστωσών της **F**(t).

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt} = \frac{d(\cos t + t\sin t)}{dt} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t,$$

$$\frac{d\alpha_2(t)}{dt} = \frac{d(\sin t - t\cos t)}{dt} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t,$$

Άρα, η παράγωγος της **F**(s) είναι,

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{ds} = \left(\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\right)\frac{dt}{ds} = (t\cos t\,\mathbf{i} + t\sin t\,\mathbf{j})t = t^2(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}).$$

2.3.4.2 *Παράδειγμα 2*

Να βρεθεί η F'(s) ως συνάρτηση του t, $\mathbf{F}(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, (dt/ts= $\sqrt{2}$).

Λύση

Για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης **F**(t) θα πρέπει να βρούμε τις παραγώγους των συνιστωσών της. Έτσι, έχουμε ότι $\alpha_1'(t) = (-\sin t)' = -\cos t$, $\alpha_2'(t) = (\cos t)' = -\sin t$, και $\alpha_3'(t) = (1)' = 0$.

Άρα, η παράγωγος της **F**(t) είναι,

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{ds} = \left(\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\right)\frac{dt}{ds} = \left(-\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}\right)\sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}\right).$$

2.4 Κλίση, απόκλιση, στροβιλισμός

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις έννοιες της κλίσης, της απόκλισης και του στροβιλισμού. Είναι έννοιες πάρα πολύ χρήσιμες σε όλες τις τεχνολογικές επιστήμες, όπως στους μηχανολόγους, ηλεκτρολόγους, κλπ., αλλά και στους φυσικούς, μαθηματικούς, επιστήμονες της πληροφορικής, κλπ.

2.4.1 Κλίση βαθμωτής συνάρτησης (grad)

Ορίζουμε ως *διανυσματικό διαφορικό τελεστή* (vector differential operator) την έκφραση,

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{2.52}$$

Το σύμβολο ∇ ονομάζεται «del» (ντέλ), ή μερικές φορές «nabla» (νάμπλα), και δεν συναντάται ποτέ μόνο του. Είναι ένας τελεστής και αναφέρεται πάντα σε μία βαθμωτή συνάρτηση.

Εάν έχουμε μία βαθμωτή (scalar function) συνάρτηση f(x,y,z), η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ή σε μία περιοχή του, τότε ορίζουμε ως *κλίση* ή *βαθμίδα της συνάρτησης* (gradient), στην περιοχή αυτή, το διάνυσμα,

$$grad\ f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{2.53}$$

Δεν έχει έννοια η κλίση διανυσματικής συνάρτησης.

2.4.1.1 *Παράδειγμα 1*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z)=x^3\sin z+z^2e^{2y}$. Να βρεθεί η κλίση της f στο σημείο Π(1,2,3).

Λύση

Για να βρούμε την κλίση της συνάρτησης f(x,y,z) θα πρέπει να βρούμε τις μερικές παραγώγους της ως προς x, y και z. Έτσι, έχουμε ότι,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(x^3\sin z+z^2e^{2y})}{\partial x}=\frac{\partial(x^3\sin z)}{\partial x}+\frac{\partial(z^2e^{2y})}{\partial x}=3x^2\sin z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(x^3\sin z+z^2e^{2y})}{\partial y}=\frac{\partial(x^3\sin z)}{\partial y}+\frac{\partial(z^2e^{2y})}{\partial y}=2z^2e^{2y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial(x^3\sin z+z^2e^{2y})}{\partial z}=\frac{\partial(x^3\sin z)}{\partial z}+\frac{\partial(z^2e^{2y})}{\partial z}=x^3\cos z+2ze^{2y}.$$

Επομένως, έχουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f στο σημείο Π(1,2,3) είναι,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3\cdot 1^2\cdot\sin 3=3\sin 3,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2\cdot 3^2\cdot e^{2\cdot 2}=18e^4,\ \text{και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=1^3\cdot\cos 3+2\cdot 3\cdot e^{2\cdot 2}=\cos 3+6e^4.$$

Τέλος, η κλίση της συνάρτησης f στο σημείο Π(1,2,3) είναι,

$$\mathit{grad}\, f\equiv\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}=3\cos 3\,\mathbf{i}+18e^4\mathbf{j}+(\cos 3+6e^4)\mathbf{k}.$$

2.4.1.2 *Παράδειγμα 2*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z)=x^3yz^2+x^2y^2z^3$. Να βρεθεί η κλίση της f στο σημείο Π(1,2,3).

Λύση

Για να βρούμε την κλίση της συνάρτησης f(x,y,z) θα πρέπει να βρούμε τις μερικές παραγώγους της ως προς x, y και z. Έτσι, έχουμε ότι,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(x^3yz^2+x^2y^2z^3)}{\partial x}=\frac{\partial(x^3yz^2)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y^2z^3)}{\partial x}=3x^2yz^2+2xy^2z^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(x^3yz^2+x^2y^2z^3)}{\partial y}=\frac{\partial(x^3yz^2)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2y^2z^3)}{\partial y}=x^3z^2+x^2y^2z^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial(x^3yz^2+x^2y^2z^3)}{\partial z}=\frac{\partial(x^3yz^2)}{\partial z}+\frac{\partial(x^2y^2z^3)}{\partial z}=2x^3\,yz+3xy^2z^3.$$

Έτσι, έχουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f στο σημείο Π(1,2,3) είναι,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3\cdot 1^2\cdot 2\cdot 3^2+2\cdot 1\cdot 2^2\cdot 3^3=54+216=270,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=1^3\cdot 3^2+1^2\cdot 2^2\cdot 3^3=9+108=117,\text{ και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2\cdot 1^3\cdot 2\cdot 3+3\cdot 1\cdot 2^2\cdot 3^3=12+324=336.$$

Επομένως, η κλίση της συνάρτησης f στο σημείο Π(1,2,3) είναι,

$$grad\ f\equiv\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}=270\ \mathbf{i}+117\mathbf{j}+336\,\mathbf{k}.$$

2.4.1.3 Γεωμετρική ερμηνεία της κλίσης μίας συνάρτησης

Η γεωμετρική ερμηνεία της κλίσης μίας βαθμωτής συνάρτησης είναι η εξής: Εάν έχουμε μία συνάρτηση c=f(x,y) στο επίπεδο, τότε η κλίση της f(x,y) είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο (x,y).

Εάν τώρα έχουμε μία συνάρτηση c=f(x,y,z) στο χώρο, η κλίση της f(x,y,z) είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο (x,y,z).

2.4.2 Διανυσματικά και βαθμωτά πεδία

Εάν θεωρήσουμε ότι κάθε σημείο Π(x,y,z) μίας περιοχής R συσχετίζεται με ένα διάνυσμα **F**(x,y,z), τότε το σύνολο όλων των διανυσμάτων **F**(x,y,z) της περιοχής R, ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο* (vector field).

Τέτοια διανυσματικά πεδία έχουμε στην φυσική, όπως την ταχύτητα, τη δύναμη, την επιτάχυνση, τα μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία, στην ροή των ρευστών, κλπ.

Παρομοίως, εάν θεωρήσουμε ότι κάθε σημείο Π(x,y,z) μίας περιοχής R συσχετίζεται με μία βαθμωτή ποσότητα φ(x,y,z), τότε η φ(x,y,z) ονομάζεται *βαθμωτή συνάρτηση* (vector function). Επίσης, λέμε ότι στην περιοχή R υπάρχει ένα *βαθμωτό πεδίο* (vector field).

Παραδείγματα βαθμωτών πεδίων είναι η θερμοκρασία, το δυναμικό, κλπ.

2.4.3 Απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης (divergence)

Εάν έχουμε μία διανυσματική (vector function) συνάρτηση **F**(x,y,z) με τύπο,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = a_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + a_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + a_3(x,y,z)\,\mathbf{k},$$

τότε ορίζουμε ως *απόκλιση* της συνάρτησης (divergence), την ποσότητα,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}. \tag{2.54}$$

Δεν πρέπει να μας διαφεύγει της προσοχής ότι στη σχέση (2.54) το «del» έχει δίπλα του την τελεία, έτσι έχουμε ότι η σχέση (2.54) δίνει το εσωτερικό γινόμενο του «del» με την διανυσματική συνάρτηση **F**. Να σημειώσουμε επίσης ότι η κλίση μίας συνάρτησης ενεργεί επί μίας βαθμωτής ποσότητας και δίνει ως αποτέλεσμα ένα διάνυσμα, ενώ η απόκλιση ενεργεί επί ενός διανύσματος και έχει ως αποτέλεσμα μία βαθμωτή ποσότητα.

2.4.3.1 *Παράδειγμα 1*

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)=x^3y\mathbf{i}+z^2e^{2y}\mathbf{j}+yz^2\mathbf{k}$. Να βρεθεί η απόκλιση της **F** στο σημείο Π(1,2,1).

Λύση

Για να βρούμε την απόκλιση της συνάρτησης **F** θα πρέπει να βρούμε τις μερικές παραγώγους των συνιστωσών της ως προς x, y και z, αντίστοιχα. Έτσι, έχουμε ότι,

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{\partial (x^3 y)}{\partial x} = 3x^2 y\,,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial y} = \frac{\partial (z^2 e^{2y})}{\partial y} = 2z^2 e^{2y}\,,$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial z} = \frac{\partial (yz^2)}{\partial z} = 2yz\,.$$

Έτσι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης **F** στο σημείο Π(1,2,1) είναι,

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = 3\cdot 1^2 \cdot 2 = 6\,,\ \frac{\partial a_2}{\partial y} = 2\cdot 1^2 \cdot e^{2\cdot 2} = 2e^4\,,\ \text{και}\ \frac{\partial a_3}{\partial z} = 2\cdot 2\cdot 1 = 4\,.$$

Τέλος, η απόκλιση της συνάρτησης **F** στο σημείο Π(1,2,1) είναι,

$$\nabla\cdot\mathbf{F} \equiv \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = 6 + 2e^4 + 4 = 10 + 2e^4\,.$$

2.4.3.2 *Παράδειγμα 2*

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)=x^3yz^2\mathbf{i}+x^2y^2z^3\mathbf{j}+xy^4z^2\mathbf{k}$. Να βρεθεί η απόκλιση της **F** στο σημείο Π(1,2,3).

Λύση

Για να υπολογίσουμε την απόκλιση της συνάρτησης **F** βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους των συνιστωσών της ως προς x, y και z, αντίστοιχα. Έτσι έχουμε,

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{\partial (x^3 yz^2)}{\partial x} = 3x^2yz^2\,,\ \frac{\partial a_2}{\partial y} = \frac{\partial (x^2y^2z^3)}{\partial y} = 2x^2yz^3\,,$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial z} = \frac{\partial (xy^4z^2)}{\partial z} = 2xy^4z\,.$$

Έτσι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης **F** στο σημείο Π(1,2,3) είναι,

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = 3\cdot 1^2 \cdot 2\cdot 3^2 = 54\,,\ \frac{\partial a_2}{\partial y} = 2\cdot 1^2 \cdot 2\cdot 3^3 = 108\,,\ \text{και}\ \frac{\partial a_3}{\partial z} = 2\cdot 1\cdot 2^4\cdot 3 = 96\,.$$

Τέλος, η απόκλιση της συνάρτησης **F** στο σημείο Π(1,2,3) είναι,

$$\nabla\cdot\mathbf{F} \equiv \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = 6 + 2e^4 + 4 = 10 + 2e^4\,.$$

2.4.4 Στροβιλισμός διανυσματικής συνάρτησης (curl)

Εάν έχουμε μία διανυσματική (vector function) συνάρτηση **F**(x,y,z) με τύπο,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = a_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + a_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + a_3(x,y,z)\,\mathbf{k}\,,$$

τότε ορίζουμε ως *στροβιλισμό* ή *περιστροφή* της συνάρτησης (curl), το διάνυσμα,

$$\nabla\times\mathbf{F} \equiv \left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\,. \qquad (2.55)$$

Ο τελεστής $\nabla\times$ (curl) ενεργεί επί ενός διανύσματος και έχει ως αποτέλεσμα ένα διάνυσμα. Εάν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (2.52), έχουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο του τελεστή $\nabla\times$ και της διανυσματικής συνάρτησης **F** δίνεται (σύμφωνα και με τον τύπο (2.28)) από την παρακάτω σχέση,

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\,. \qquad (2.56)$$

2.4.4.1 *Παράδειγμα 1*

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^3-yz)\mathbf{i}+(x^3y^2z^4-y^2z)\mathbf{j}+(xy^2z-y^3z)\mathbf{k}$. Να βρεθεί ο στροβιλισμός της **F** στο σημείο Π(-1,2,1).

Λύση

Για να βρούμε τον στροβιλισμό της συνάρτησης **F**(x,y,z) θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.56),

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\,.$$

Έτσι έχουμε,

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial (x^3 - yz)}{\partial y} = -z\,,\quad \frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{\partial (x^3 - yz)}{\partial z} = -y\,,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{\partial (x^3y^2z^4 - y^2z)}{\partial x} = 3x^2y^2z^4, \ \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial (x^3y^2z^4 - y^2z)}{\partial y} = 4x^3y^2z^3 - y^2,$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial x} = \frac{\partial (xy^2z - y^3z)}{\partial z} = y^2z, \frac{\partial a_3}{\partial y} = \frac{\partial (xy^2z - y^3z)}{\partial y} = 2xyz - 3y^2z.$$

Επομένως, έχουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f στο σημείο Π(-1,2,1) είναι,

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = -1, \ \frac{\partial a_1}{\partial z} = -2,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} = 3 \cdot (-1)^2 \cdot 2^2 \cdot 1^4 = 12, \ \frac{\partial a_2}{\partial z} = 4 \cdot (-1)^3 \cdot 2^2 \cdot 1^3 - 2^2 = 12,$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial x} = 2^2 \cdot 1 = 4, \frac{\partial a_3}{\partial y} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2^2 \cdot 1 = -8.$$

Τέλος, ο στροβιλισμός της συνάρτησης **F** στο σημείο Π(-1,2,1) είναι,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} =$$

$$= (-8 - 12)\mathbf{i} + (-2 - 4)\mathbf{j} + (12 - 12)\mathbf{k} = -20\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j}.$$

2.4.4.2 *Παράδειγμα 2*

Δίνεται η συνάρτηση **F**(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)(2**i**+5**j**-3**k**). Να βρεθεί ο στροβιλισμός της **F** στο σημείο Π(1,-2,1).

Λύση

Όπως και προηγουμένως, για να βρούμε τον στροβιλισμό της συνάρτησης **F**(x,y,z) θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.56),

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Έτσι έχουμε,

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial (2(x^2 + y^2 + z^2))}{\partial y} = 4y, \ \frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{\partial (2(x^2 + y^2 + z^2))}{\partial y} = 4z,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{\partial(5(x^2+y^2+z^2))}{\partial y} = 10x,\ \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial(5(x^2+y^2+z^2))}{\partial z} = 10z,$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial x} = \frac{\partial(-3(x^2+y^2+z^2))}{\partial x} = -6x,\ \frac{\partial a_3}{\partial y} = \frac{\partial(-3(x^2+y^2+z^2))}{\partial y} = -6y.$$

Επομένως, έχουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f στο σημείο Π(1,-2,1) είναι,

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = -8,\ \frac{\partial a_1}{\partial z} = -8,\ \frac{\partial a_2}{\partial x} = 10,\ \frac{\partial a_2}{\partial z} = 10,$$

$$\text{και } \frac{\partial a_3}{\partial x} = -6, \frac{\partial a_3}{\partial y} = 12.$$

Τέλος, ο στροβιλισμός της συνάρτησης **F** στο σημείο Π(1,-2,1) είναι,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} =$$

$$= (12-10)\mathbf{i} + (-8+6)\mathbf{j} + (10+8)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 18\mathbf{k}.$$

2.4.5 Ιδιότητες κλίσης, απόκλισης, στροβιλισμού

Εάν δύο συναρτήσεις f(x,y,z), και g(x,y,z), οι οποίες είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την κλίση,

α) $\nabla(kf) = k\,\nabla(f)$ (για κάθε αριθμό k), (2.57)

β) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$, (2.58)

γ) $\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\nabla f$, (2.59)

Παραδείγματα

Εάν $f(x,y,z)=e^{2x}$, και $g(x,y,z)=y+z$, τότε $\nabla f = 2e^{2x}\,\mathbf{i}$, και $\nabla g = \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Έτσι έχουμε,

α) $\nabla(5f) = \nabla(5e^{2x}) = 5\cdot 2e^{2x}\,\mathbf{i} = 5\cdot\nabla f$,

β) $\nabla(f+g) = \nabla(e^{2x}+y+z) = 2e^{2x}\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = 2e^{2x}\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = \nabla f + \nabla g$,

γ) $\nabla(fg) = \nabla(e^{2x}(y+z)) = \nabla(e^{2x}y) + \nabla(e^{2x}z) = 2ye^{2x}\mathbf{i} + e^{2x}\mathbf{j} + 2ze^{2x}\mathbf{i} + e^{2x}\mathbf{k} =$

$= 2e^{2x}(y+z)\mathbf{i} + e^{2x}(\mathbf{j}+\mathbf{k}) = f\,\nabla g + g\nabla f$.

Θεώρημα 2.1

Για κάθε συνάρτηση f(x,y,z) έχουμε ότι ο στροβιλισμός κάθε κλίσης είναι το μηδενικό διάνυσμα, δηλ.,

$$\nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}\,. \tag{2.60}$$

Θεώρημα 2.2

Για κάθε διανυσματικό πεδίο **F**(x,y,z) έχουμε ότι η απόκλιση κάθε στροβιλισμού είναι μηδέν,

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0\,. \tag{2.61}$$

Οι αποδείξεις μπορούν να γίνουν ως ασκήσεις.

Εάν ισχύει ότι $\operatorname{curl}\mathbf{F}=0$, τότε σημαίνει ότι το διανυσματικό πεδίο είναι *αστρόβιλο*. Αυτό σημαίνει ότι κανένα σημείο του πεδίου δεν περιστρέφεται. Έτσι εάν βρεθεί ένα σώμα μέσα στο διανυσματικό πεδίο δεν θα περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του, αλλά πιθανόν να κινείται κατά την φορά του πεδίου. Για παράδειγμα, εάν έχουμε ένα ρευστό, το οποίο κινείται, τότε ένα σώμα μέσα στο πεδίο του ρευστού θα κινείται μαζί με το ρευστό, και δεν θα παρουσιάζει «δίνες».

Εάν ισχύει ότι $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$, τότε το διανυσματικό πεδίο **F** ονομάζεται *σωληνοειδές*.

2.4.5.1 *Παράδειγμα 1*

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)=2x^2y\mathbf{i}-2(xy^2+y^3z)\mathbf{j}+3y^2z^2\mathbf{k}$. Να βρεθεί η απόκλιση της **F**.

Λύση

Για να υπολογίσουμε την απόκλιση της συνάρτησης **F**, όπως έχουμε δεί στην παράγραφο 2.4.3, βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους των συνιστωσών της ως προς x, y και z, αντίστοιχα. Έτσι έχουμε,

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial (2x^2 y)}{\partial x} = 4xy\,, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = \frac{\partial \left[-2(xy^2 + y^3 z)\right]}{\partial y} = -4xy - 6y^2 z\,,$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial z} = \frac{\partial (3y^2 z^2)}{\partial z} = 6y^2 z\,.$$

Έτσι, η απόκλιση της συνάρτησης **F** είναι,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} = 4xy - 4xy - 6y^2 z + 6y^2 z = 0\,.$$

Επομένως, το διανυσματικό πεδίο είναι ένα σωληνοειδές.

Ασκήσεις

1. Εάν Α είναι ένα σημείο με συντεταγμένες (2,4), και Β ένα άλλο σημείο με συντεταγμένες (-1,2), να βρεθούν τα διανύσματα θέσης των Α και Β, και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Επί πλέον, να βρεθεί και το μέτρο $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

2. Έστω τα διανύσματα $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, και $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$. Να υπολογισθεί το άθροισμα **a** + **b**.

3. Να υπολογισθεί το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OP} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

4. Να βρεθούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{OP} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

5. Εάν **a =** 3**i**+2**j**-8**k** και **b =** 3**i**-**j**+4**k** να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο **a** · **b**.

6. Εάν **a =** -**i**+2**j**-4**k** να βρεθεί: α) το εσωτερικό γινόμενο **a** · **a**, και β) το $|\mathbf{a}|^2$.

7. Εάν **a =** 2**i**-3**j**+7**k** και **b = i**-5**j**+2**k** να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο **a** · **b** και η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

8. Εάν **a =** 3**i**-**j**+5**k** και **b =** 5**i**-4**j**+2**k** να βρεθεί το εξωτερικό γινόμενο **a** × **b**.

9. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ όταν τα σημεία Α, Β, και Γ έχουν συντεταγμένες (0,3,1), (3,1,2), και (2,2,3), αντίστοιχα.

10. Χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 4 της παραγράφου 2.2.8.5, να βρεθεί η μαγνητική επαγωγή **B** του πεδίου, εάν έχουμε ότι η θέση του φορτίου είναι **r** = **i+**2**j**-3**k** και η ταχύτητά του **u** = 3**i-**5**j**-2**k**.

11. Δίνονται τα διανύσματα **a** = 3**i+**4**j**-2**k**, **b** = 2**i**+2**j+**5**k**, και **c** = 3**i-**2**j+**5**k**. Να υπολογισθεί το γινόμενο **a**×(**b**×**c**).

12. Να εξετασθεί εάν τα διανύσματα **a** = 2**i+**3**j**+**k**, **b** = **i**-2**j+**2**k**, και **c**=3**i+j+3k**, είναι συνεπίπεδα.

13. Να προσδιορισθεί η τιμή του p έτσι ώστε τα τρία διανύσματα **a** = 3**i+**2**j**+**k**, **b** = 2**i-**2**j-**p**k**, και **c** = 3**i-**4**j-**2**k**, να είναι συνεπίπεδα.

14. Δίνονται τα διανύσματα **a** = 5**i-**2**j+**3**k**, **b** = 2**i**-2**j-**3**k**, και **c** = 7**i+**2**j-**5**k**. Να υπολογισθεί το γινόμενο $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

15. Τα σημεία A, B, και Γ έχουν συντεταγμένες (1,-2,3), (6,2,-3), και (4,1,2), αντίστοιχα. Να βρεθούν: α) τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$, και β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

16. Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα **a**=-2**i**+3**j**-6**k** και **b**=3**i**-2**j**-5**k**.

17. Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $\mathbf{F}(t)=(t^2-1)\mathbf{i}+5t^3\,\mathbf{j}-7t\,\mathbf{k}$, όταν το t τείνει στο 1.

18. Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $\lim\limits_{t\to -3}\mathbf{F}(t)=\dfrac{t^2-3t+10}{t+2}\mathbf{i}+\ln(6+t^2)\,\mathbf{j}$.

19. Για ποιές τιμές του t η συνάρτηση $\mathbf{F}(t)=5\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+3t^2\,\mathbf{k}$, είναι συνεχής;

20. Για ποιές τιμές του t η συνάρτηση $\mathbf{F}(t)=e^{3t}\,\mathbf{i}+\cos\dfrac{1}{t^2-1}\,\mathbf{j}+\ln\left|9-t^2\right|\mathbf{k}$, είναι συνεχής;

21. Να βρεθεί η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης **F**(t) με τύπο, $\mathbf{F}(t)=e^{2t}\,\mathbf{i}-t^2e^{-3t}\,\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$.

22. Να βρεθεί η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης **F**(t) με τύπο, $\mathbf{F}(t)=\dfrac{9t^2-1}{5t+2}\mathbf{i}+\ln(2+5t^2)\,\mathbf{j}+(-5t^4-5)\,\mathbf{k}$.

23. Ένα σωματίδιο κινείται στο χώρο έτσι ώστε η θέση του στο χρόνο t, δίνεται από τις συνιστώσες $x=3t^2-1$, $y=3t^3-2t$, και $z=10t^5+3t^2$. Να βρεθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας του σωματιδίου και της επιτάχυνσής του, όταν t=1.

24. Να βρεθεί η παράγωγος $\mathbf{F}'(s)$ ως συνάρτηση του t εάν έχουμε ότι, $\mathbf{F}(t)=(\cos t-t^2\sin t)\mathbf{i}+(\sin t+t^2\cos t)\mathbf{j}$ και $\frac{dt}{ds}=3t$.

25. Να βρεθεί η $F'(s)$ ως συνάρτηση του t, όταν $\mathbf{F}(t)=t\sin t\,\mathbf{i}-\cos t\,\mathbf{j}+5t\,\mathbf{k}$, ($dt/ts=\sqrt{2}$).

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z)=x^2\cos z+z^3e^{3y}$. Να βρεθεί η κλίση της f στο σημείο Π(1,2,4).

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z)=x^5y^2z^3+3xy^3z^5$. Να βρεθεί η κλίση της f στο σημείο Π(1,2,5).

28. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2y\mathbf{i}+5z\mathbf{j}+x^2yz\mathbf{k}$. Να βρεθεί η απόκλιση της **F** στο σημείο Π(1,2,1).

29. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2y^3z^2\mathbf{i}+5e^xz\mathbf{j}+x^2y^5z\mathbf{k}$. Να βρεθεί η απόκλιση της **F** στο σημείο Π(-1,1,-1).

30. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)=xyz^2\mathbf{i}-5z\mathbf{j}+y^3z^4\mathbf{k}$. Να βρεθεί η απόκλιση της **F** στο σημείο Π(1,1,1).

31. Εάν $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2y^3-xyz)\mathbf{i}+(5e^xz+x^2y)\mathbf{j}+x^2y^2z^2\mathbf{k}$, να βρεθεί ο στροβιλισμός της **F** στο σημείο Π(1,2,3).

32. Εάν $f(x,y,z)=x^2y^2z^2-2x^2y^3z^4$, να βρεθεί η απόκλιση της κλίσης της f (div grad f) στο σημείο Π(1,-1,1).

33. Εάν $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2y^2-xyz)\mathbf{i}-(5e^{2x}z-x^2y^2)\mathbf{j}+x^2y^3z^4\mathbf{k}$, να βρεθεί ο στροβιλισμός του στροβιλισμού (curl curl **F**) της **F** στο σημείο Π(1,1,1).

34. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z)=(xy-yz)\mathbf{i}+(e^{2x}-xy^2)\mathbf{j}+yz^2\mathbf{k}$. Να εξετασθεί,

α) εάν το πεδίο είναι σωληνοειδές, και

β) εάν το πεδίο είναι αστρόβιλο.

35. Δίνονται τα διανυσματικά πεδία **F**(x,y,z)=(x+yz)**i**-(e^{2y}-x^2y^2)**j**+y^2z^2**k**, και **G**(x,y,z)=yz**i**+(e^{2xy}-x^3y^2)**j**+y^3z^2**k** και η συνάρτηση f(x,y,z)=x^2y^2-e^{3x}yz+5x. Να υπολογισθούν,

α) ∇f, β) $\nabla\cdot\mathbf{F}$, γ) $\nabla\times\mathbf{F}$, δ) $\nabla\times\mathbf{G}$, ε) grad div **F**, στ) curl curl **F**, ζ) grad div **FG**, η) curl curl **G**.